LIVRES

Percolation et modèle d'Ising
W. Werner
Société Mathématique de France, Cours Spécialisés 16, 2009. 161 p.
ISBN : 978-2-85629-276-1. 40 €

La percolation et le modèle d'Ising sont deux modèles de référence de la physique statistique pour étudier les transitions de phases. Le modèle de percolation a été introduit par Hammersley en 1957 pour décrire certaines caractéristiques des milieux aléatoires. Le modèle d'Ising, qui fut inventé par Lenz vers 1920, modélise des effets collectifs produits par des interactions locales entre particules, comme le ferromagnétisme. Ces deux modèles issus de la physique posent aussi de formidables problèmes mathématiques, citons notamment le concept d'universalité conjecturé par les physiciens. De nombreuses théories de physique mathématique ont été élaborées pour essayer de répondre à ces questions. Ces dernières années des résultats spectaculaires sur les phénomènes critiques en dimension deux ont été obtenus par les méthodes probabilistes de Lawler, Schramm, Werner, Smirnov, etc.

Ce livre repose sur des notes de cours donnés par W. Werner au niveau M2 et sa grande originalité est de présenter à la fois les fondements de la percolation, mais aussi les développements les plus récents sur l'invariance conforme en dimension deux des modèles de percolation et d'Ising.

Le livre s'ouvre sur une introduction très pédagogique au modèle de percolation en détaillant les concepts fondamentaux de transition de phase, d'inégalités stochastiques (FKG, BK) et de décroissance des corrélations. Ces résultats classiques figurent dans l'ouvrage de référence de Grimmett[1], mais c'est, à ma connaissance, le premier livre en français sur la question. La nouveauté dans la présentation du sujet est de permettre au lecteur d'accéder ensuite très rapidement aux résultats sur le régime de la percolation critique en dimension 2 : la théorie de Russo-Seymour-Welsh, mais surtout la preuve de la formule de Cardy-Smirnov.

La seconde partie du livre est dédiée au modèle d'Ising et plus généralement au modèle de Potts qui peuvent être interprétés comme des modèles de percolation dépendante (FK-percolation). À l'image de la première partie, les principaux aspects de la FK-percolation sont expliqués et plusieurs conjectures recensées. Ces chapitres offrent un aperçu concis mais assez complet de la FK-percolation sans être aussi exhaustif que le volumineux livre de Grimmett[2]. Le livre se conclut par une excellente introduction aux méthodes développées par Smirnov pour prouver l'invariance conforme du modèle d'Ising. Toute la démarche pour obtenir l'analyticité discrète est expliquée très clairement : les modèles de boucles, la spécificité du modèle d'Ising...

[1] G. Grimmett, *Percolation*, Second edition, Springer 1999.
[2] G. Grimmett, *The Random-Cluster Model*, Springer 2006.

Cet ouvrage constitue à la fois une excellente introduction mathématique à l'étude de modèles probabilistes sur réseau (percolation, modèles d'Ising et de Potts) et un point d'entrée remarquablement clair et concis aux phénomènes critiques en dimension deux. Il s'agit d'une lecture à conseiller aux étudiants pour découvrir ces modèles comme aux chercheurs confirmés qui souhaitent comprendre les résultats récents de S. Smirnov sur l'invariance conforme en dimension deux.

Thierry Bodineau
École Normale Supérieure, Paris

Rationnel mon Q

L. Duchêne et Agnès Leblanc
Hermann, 2010.
ISBN : 978-2-70567-031-3. 15 €

Logique formelle, combinatoire, théorie des graphes, algèbre... Que ce soit dans la définition de nouvelles règles formelles ou dans les thèmes abordés – *La Vie, Mode d'emploi* reste sans doute le seul Prix Médicis à contenir le symbole Hom – les mathématiques ont, on le sait, été une source d'inspiration féconde pour les auteurs de l'Oulipo. Avec *Rationnel, mon* **Q**, sous-titré « 65 exercices de style sur l'irrationalité de racine de 2 », les mathématiques rendent la politesse. Dans la plus pure tradition de la fameuse citation de Raymond Queneau remarquant que « [l]e classique qui écrit sa tragédie en observant un certain nombre de règles qu'il connaît est plus libre que le poète qui écrit ce qui lui passe par la tête », les 65 exercices en question répondent à plusieurs contraintes : tout d'abord, ils contiennent, ou au minimum évoquent, la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (à l'occasion, quelques autres) ; ensuite, ils sont rédigés en un certain style littéraire ou mathématique (désinvolte, pédant...) ; enfin, ils satisfont à une propriété technique oulipienne ou pastichent le style d'un auteur du monde des arts, des sciences ou des lettres. Ultime critère : les auteures s'amusent à exhiber leurs textes en couple. Chaque variation admet une adjointe, à moins que ce ne soit une transposition, qui vient l'éclairer d'une nouvelle lumière.

Des lettres, Ludmila Duchêne et Agnès Leblanc n'en manquent pas, même si, comme il se doit, le *e* finira par disparaître, et le W par briller par son absence. C'est avec un réel bonheur que j'ai découvert comment l'irrationalité de $\sqrt{2}$ aurait pu être traitée par Beckett, Flaubert, Joyce ou Molière ou comment le critère d'Eisenstein permet d'expliquer le *Théorème* de Pasolini. J'avoue même quelques francs éclats de rires quand les auteures s'amusent aux dépens de ceux qui ont tendance à tirer un peu trop sur la (super-)corde (page 117) ou quand elles font discuter le petit Nicolas avec son homonyme poldève (page 133). Brillants sont également les exercices plus formels : les mânes de Théétète nous offrent une charmante démonstration monovocalique, un prisonnier anonyme nous griffonne la sienne (en utilisant uniquement les lettres sans jambage inférieur ou supérieur ; on s'interdit donc le l et le p, et ne restent que les lettres acemnorsuvwxz) en forme de testament sur le mur de sa prison (page 141)...

Au risque de passer pour coincé du corps des rationnels, je reconnais avoir été un peu moins convaincu par ce que l'on pourrait appeler la partie **Q** de l'ouvrage.

Bien que l'érotisme soit fréquemment présent dans les textes, il m'a à la longue un peu ennuyé et je ne suis pas sûr que les augustes membres de la SMF trouvent tant de motifs de plaisir de ce côté-là. Mais peut-être cela révèle-t-il une intention des auteures, comme nous allons le voir.

Une lecture possible de l'œuvre de Perec est de voir en son obsession virtuose du jeu avec les lettres et les mots l'effort permanent de l'auteur d'extraire des signes un sens, une identité mémorielle, peut-être même une inspiration vitale, apte à donner un sens à la vie, et d'abord à la sienne, brisée par la disparition brutale de ses parents. Il m'a semblé qu'une pareille lecture, finalement très intimiste pour un ouvrage si ludique au premier abord, était possible pour *Rationnel, mon* **Q**. Dans ce livre où amour et érotisme sont omniprésents, on ne peut être que frappé par l'insatisfaction profonde qu'ils semblent procurer : qu'il soit matrimonial (dans le magnifique *Portrait de l'artiste en jeune fille*), filial (dans la *Version latine*), essentiellement sexuel (pour les textes X et Y, ainsi que pour celui intitulé *Fonctoriel*) ou même simplement évoqué ou potentiel (d'une des auteures pour son interlocuteur de l'introduction ou de la rêveuse pour l'étourdi) l'amour est toujours déçu, trompé, équivoque ou univoque et finalement insatisfaisant. L'absurdité, la contradiction finale démontrant l'irrationalité de nos prémisses, que les auteures veulent porter à notre attention serait donc peut-être l'observation (sans cesse réitérée par les protagonistes de l'ouvrage) que ni la virtuosité mathématique et linguistique, ni l'érudition et la culture ne sont suffisantes pour susciter affection et amour ; qu'elles peuvent même rendre plus cruelles, ou du moins plus désagréables, les petites humiliations que l'on doit subir lorsque l'on appartient à la gent féminine. Car pour être mathématiciennes, les auteures n'en sont pas moins femmes, dans la vie comme dans *Rationnel, mon* **Q**, et semblent toujours avoir à l'esprit que le mieux qu'elles peuvent attendre de la vie est « un cours [NdA : de mathématiques bien sûr] ou un suave roman sans sexe car sans amour » comme elles l'écrivent page 141 (simple coïncidence ?). Est-ce pour cela que le sexe, comme nous l'avons déjà évoqué, est si faible dans cet ouvrage (ce que l'auteur de ces lignes refuse catégoriquement d'attribuer par essence au genre choisi) ? Est-ce ainsi également que l'on doit lire le texte intitulé *Mersenne ne m'aime*, rédigé entièrement au féminin, et qui fait de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ un véritable manifeste féministe (un brin moqueur, toutefois) ? Suivant cet axe de lecture, on se plaît à remarquer que le livre se clôt sur un texte intitulé *Lysistrata*, dont on rappellera à tout hasard qu'elle se rendit célèbre pour avoir voulu remédier à l'irrationalité de sa société en décrétant une grève du sexe (dans *Rationnel, mon* **Q**, ce procédé devient bien sûr l'affirmation révolutionnaire que **Q** est algébriquement clos). Envisagé ainsi, *Rationnel, mon* **Q** pourrait se lire comme un témoignage ironique et facétieux des difficultés que rencontrent « une personne du sexe [...] du fait de nos coutumes et préjugés » pour « explorer en profondeur [...] les sciences abstraites en général et plus particulièrement [l]es mystères des nombres », pour citer Gauss dans sa correspondance avec celle qui signait déjà du nom de Leblanc. Ou bien faut-il imaginer le Sisyphe condamné à démontrer encore et toujours l'irrationalité de $\sqrt{2}$ heureux, et voir au contraire dans l'acte de création mathématique et littéraire la porte de sortie par excellence pour celles (et ceux, il n'y a pas de raison) qui se trouveraient trop frustrés de l'absurdité du monde social ?

Mais revenons à nos racines. L'auteur de ces lignes, qui confesse un faible pour l'Oulipo, a passé un excellent moment à la lecture de *Rationnel, mon* **Q** et il imagine que ce livre enchantera tous ceux qui aiment les mathématiques, les exercices de style, l'irrationalité, les corps (de nombres) et les belles constructions formelles. Autrement dit, sans doute, l'intégralité des lecteurs de cette revue[3].

Olivier Fouquet
Université Paris-Sud 11

Heights in Diophantine geometry
E. Bombieri, W. Gubler
Cambridge University Press, 2007. 668 p. ISBN :978-0-521-17122-93. £75

Le livre de Bombieri et Gubler expose très clairement les multiples notions de hauteurs qui ont été introduites dans le cadre de la géométrie diophantienne, ainsi que les grands résultats de cette théorie.

Les mots *géométrie diophantienne* ont été lancés par Serge Lang il y a un demi-siècle [9, 5]. Ils désignent une approche des équations diophantiennes *via* la géométrie algébrique, clarifiant la distinction entre notions géométriques (objets définis sur le corps des complexes ou plus généralement sur un corps algébriquement clos) et arithmétiques (objets définis sur **Z** ou **Q** ou plus généralement sur un anneau ou corps de type fini). Les solutions d'équations diophantiennes sont ainsi vues comme les points entiers ou rationnels de la variété définie par les équations. Un outil fondamental a émergé, la notion de hauteur, qui dans sa forme la plus naïve peut être définie ainsi : un point P de l'espace projectif sur **Q** possède des coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$ que l'on peut choisir entières et premières entre elles, on pose alors $H(P) = \max\{|x_0|, \ldots, |x_n|\}$!.

Un des premiers résultats important du domaine est le théorème de Mordell-Weil qui dit que le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique ou plus généralement d'une variété abélienne est de type fini (1922-28). Ce résultat est crucial dans la preuve du théorème de Siegel (1929) : l'ensemble des points entiers d'une courbe affine est fini pourvu que la courbe ait un genre au moins égal à un, ou au moins trois points à l'infini. L'archétype du théorème de géométrie diophantienne est aujourd'hui le théorème de Faltings [3] (*quondam* conjecture de Mordell) : « *L'ensemble des points rationnels d'une courbe de genre au moins deux est fini* ». L'analogie entre les tores algébriques (groupes algébriques isomorphes à une puissance du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ – au moins sur la clôture algébrique du corps de définition) et les variétés abéliennes a une longue histoire. Par exemple le groupe des points entiers sur un corps de nombres K de $\mathbf{G}_m$ n'est autre que le groupe des unités $\mathcal{O}_K^\times$ de l'anneau des entiers algébriques de K ; le théorème des unités de Dirichlet indique que ce groupe est de type fini, comme le groupe de Mordell-Weil. Cette analogie avait suggéré à Serge Lang une généralisation de la conjecture de Mordell, également démontrée en 1991 grâce principalement aux

[3] Comme il serait scandaleux que cette recension ne comporte pas de note de bas de pages là où l'ouvrage en compte plus de 90 pas forcément toujours essentielles, n'est pas David Foster Wallace qui veut, ma co-autrice me fait remarquer que bien que les auteures se soient données beaucoup de mal pour être lues même par les résidants habituels de l'arrière de la salle, c'est « de la peine » qu'elles auraient dû écrire page 64.

travaux de Vojta et Faltings [4, 13]. Si G est une variété semi-abélienne (extension d'un tore par une variété abélienne) et Γ un sous-groupe de rang fini, l'intersection de Γ avec une sous-variété X fermée dans G n'est pas dense dans X (est contenue dans une hypersurface de X) sauf si X est un translaté de sous-groupe algébrique. La démonstration de ce dernier résultat repose sur la théorie des hauteurs et pas mal de géométrie algébrique mais fait aussi fait appel à des techniques classiques d'approximation diophantienne qui culminent avec la preuve du théorème de Roth (1955) puis du théorème du sous-espace de Wolfgang Schmidt dans les années 70. Dans une version simplifiée, celui-ci affirme que si les L_i sont des formes linéaires indépendantes à coefficients algébriques, l'ensemble des solutions entières $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'inéquation

$$\prod_{i=0}^{n} |L_i(x)| \leqslant H(x)^{-\varepsilon}$$

est contenu dans une réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts. Lorsque α est un nombre algébrique irrationnel, en prenant $n = 2$, $L_1(x, y) = x - \alpha y$, $L_2(x, y) = y$, on retrouve le théorème de Roth : le nombre de rationnels $x/y \in \mathbf{Q}$ tels que $|\alpha - x/y| \leqslant y^{2-\varepsilon}$ est fini.

La théorie servant de filigrane à la première démonstration de la conjecture de Mordell est la géométrie d'Arakelov, qui a été brillamment développée depuis. Les idées arakeloviennes sont encore présentes dans le travail novateur de Vojta [12] dont Serge Lang a déclaré que c'était une des plus belles visions mathématiques qu'il ait rencontrée. Il s'agit d'analogies entre la théorie de Nevanlinna (concernant la distribution des valeurs de fonctions de variable complexe) et la théorie de l'approximation diophantienne. Les conjectures de Vojta sont loin d'être démontrées (ou infirmées) aujourd'hui mais ont servi d'inspiration aux travaux précités ; elles entraînent notamment la conjecture *abc* (*confer* ci-dessous).

Le livre de Bombieri et Gubler présente un exposé systématique et très accessible de l'ensemble de ces thèmes. Serge Lang a publié il y a quelques années un point de vue dans la *Gazette* [7] où il vantait les mérites d'une vision géométrique des équations diophantiennes ; ce point de vue est devenu aujourd'hui une évidence pour beaucoup. Le présent livre concilie les deux points de vue (abstraction géométrique et calculs concrets). On peut regretter que certains aspects soit peu développés comme les développements autour de la conjecture de Zilber-Pink (voir [2]) ou l'apport de la théorie d'Arakelov, mais il sera difficile de bouder son plaisir devant la richesse et la qualité des quelques 600 pages proposées.

Le titre des chapitres décrit assez bien leur contenu : 1 Hauteurs ; 2 Hauteurs de Weil ; 3 Tores linéaires ; 4 Petits points ; 5 Équation aux unités ; 6 Théorème de Roth ; 7 Théorème du sous-espace ; 8 Variétés abéliennes ; 9 Hauteurs de Néron-Tate ; 10 Théorème de Mordell-Weil ; 11 Théorème de Faltings ; 12 Conjecture *abc* ; 13 Théorie de Nevanlinna ; 14 Conjectures de Vojta. Trois appendices concernent un résumé des outils de géométrie algébrique, de la théorie de la ramification et de la géométrie des nombres. Le chapitre sur la conjecture *abc* est riche de résultats (Belyi, Elkies, Darmon-Granville) et questions ; la conjecture *abc*, initialement proposée par Masser et Oesterlé peut se formuler très élémentairement (sur le corps des rationnels). Si $R(n)$ désigne le *radical* de n, i.e. le produit des nombres premiers

divisant n, cette conjecture prédit que pour des entiers premiers entre eux vérifiant $a+b+c=0$ on a l'inégalité

$$\max\{|a|,|b|,|c|\} \leqslant C_\varepsilon R(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Parmi les textes pré-existant sur la géométrie diophantienne, citons le survey de Serge Lang [10] essentiellement sans démonstration et les ouvrages [6, 9, 11]. Le livre de Bombieri et Gubler est remarquablement bien écrit dans un style précis et détaillé. Il contient des exposés concis, lumineux sur plusieurs sujets non abordés dans d'autres livres comme les hauteurs sur les grasmanniennes, les versions optimales du lemme de Siegel, les estimations explicites des hauteurs, le théorème de Beukers-Schlickewei sur l'équation aux unités, la version de Sprindzhuk du théorème d'irréductibilité de Hilbert, les minorations de hauteurs (problème des petits points de Lehmer ou Bogomolov) et même quelques résultats originaux comme le décompte des points situés sur des droites dans un threefold cubique (chapitre 11). Plusieurs chapitres produisent le meilleur exposé écrit sur leur sujet ; c'est le cas notamment des chapitres sur le théorème de Roth et le théorème du sous-espace, du chapitre donnant la démonstration du théorème de Faltings (suivant la démonstration de Vojta revisitée par le maître [1]) et le dernier appendice sur la géométrie des nombres.

C'est un ouvrage qui mérite de figurer dans la bibliothèque de tout(e) mathématicien(ne).

Références

[1] Bombieri, Enrico, *The Mordell conjecture revisited*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1990), 615–640.

[2] Chambert-Loir Antoine, *Relations de dépendance et intersections exceptionnelles*. Exposé Bourbaki (janvier 2011).

[3] Faltings, Gerd, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*. Invent. Math. 73 (1983), 349–366.

[4] Faltings, Gerd, *Diophantine approximation on abelian varieties*. Ann. of Math. 133 (1991), 549–576.

[5] Hindry, Marc, *La géométrie diophantienne, selon Serge Lang*. Gazette Math. No. 108 (2006), 17–32.

[6] Hindry, Marc ; Silverman, Joseph H., *Diophantine Geometry. An introduction*. GTM 201. Springer-Verlag, 2000.

[7] Lang, Serge, *Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, Diophantine geometry, and 20th century mathematics*. Gazette Math. No. 63 (1995), 17–36.

[8] Lang, Serge, *Hyperbolic and Diophantine analysis*. Bull. Amer. Math. Soc. 14 (1986), 159–205.

[9] Lang, Serge, *Fundamentals of Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York, 1983. [version augmentée de *Diophantine geometry*, Interscience, New York, 1962.]

[10] Lang, Serge, *Number theory, III. Diophantine geometry*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 60. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[11] Serre, Jean-Pierre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. (Traduit et édité par Martin Brown à partir de notes de Michel Waldschmidt). Aspects of Mathematics, Vieweg, 1989.

[12] Vojta, Paul, *Diophantine approximations and value distribution theory*. Lecture Notes in Mathematics, 1239, 1987.

[13] Vojta, Paul, *Siegel's theorem in the compact case*. Ann. of Math. 133 (1991), 509–548.

Marc Hindry,
Université Paris Diderot